Egzamin dla Aktuariuszy z 28 maja 2012 r.

Matematyka Finansowa

Zadanie 1

S – rata w ostatnim dziesięcioleciu

$$1.400000 = Ra_{\overline{10};0,09} + \left(\frac{1}{1,09}\right)^{10}\left[R\frac{1}{1,08} + (R-1000)\frac{1}{1,08^2} + ... + (R-9000)\frac{1}{1,08^{10}}\right] + \left(\frac{1}{1,09}\right)^{10}\left(\frac{1}{1,08}\right)^{10} \cdot Sa_{\overline{10};0,07}$$

$$DLUG(16) = (R-6000)\frac{1}{1,08} + (R-7000)\frac{1}{1,08^2} + (R-8000)\frac{1}{1,08^3} + (R-9000)\frac{1}{1,08^4} + \left(\frac{1}{1,08}\right)^4 Sa_{\overline{10};0,07}$$

$$DLUG(17) = (R-7000)\frac{1}{1,08} + (R-8000)\frac{1}{1,08^2} + (R-9000)\frac{1}{1,08^3} + \left(\frac{1}{1,08}\right)^3 Sa_{\overline{10};0,07}$$

$$DLUG(26) = Sa_{\overline{4};0,07}$$

$$DLUG(27) = Sa_{\overline{3};0,07}$$

$$KAP(17) = DLUG(16) - DLUG(17) = 1000a_{\overline{3};0,08} + (R-9000)\frac{1}{1,08^4} - \frac{0,08}{1,08^4}a_{\overline{10};0,07}S$$

$$KAP(27) = DLUG(26) - DLUG(27) = S\left(\frac{1}{1,07}\right)^4$$

$$2.35774,12 = 1000a_{\overline{3};0,08} + (R-9000)\frac{1}{1,08^4} + S\left(\frac{1}{1,07^4} - \frac{0,08}{1,08^4}a_{\overline{10};0,07}\right)$$

$$DLUG(10) = R\frac{1}{1,08} + (R-1000)\frac{1}{1,08^2} + ... + (R-9000)\frac{1}{1,08^{10}} + \left(\frac{1}{1,08}\right)^{10} Sa_{\overline{10};0,07}$$

$$DLUG(20) = Sa_{\overline{10};0,07}$$

$$ODP = 10R - 45000 + Sa_{\overline{10};0,07}\left(1 - \frac{1}{1,08^{10}}\right) + 1000(Ia)_{\overline{10};0,08} - (R+1000)a_{\overline{10};0,08}$$

Z 2) mamy $R = 35774,12 \cdot 1,08^4 - 1000\frac{1,08^4 - 1,08}{0,08} + 9000 - S\left(\frac{1,08^4}{1,07^4} - 0,08a_{\overline{10};0,07}\right)$

$$\rightarrow R = 23274,12 \cdot 1,08^4 + 22500 - S\left(\frac{1,08^4}{1,07^4} - 0,08a_{\overline{10};0,07}\right)$$

Wstawiamy do 1)

$$\left[a_{\overline{10};0,09} + \frac{1}{1,09^{10}}a_{\overline{10};0,08}\right]\left[23274,12 \cdot 1,08^4 + 22500 - S\left(\frac{1,08^4}{1,07^4} - 0,08a_{\overline{10};0,07}\right)\right] +$$

$$+\left(\frac{1}{1,09 \cdot 1,08}\right)^{10} a_{\overline{10};0,07}S = 400000 + \frac{1000}{1,09^{10}1,08}(Ia)_{\overline{9};0,08}$$

a

To wyliczamy S i R R wychodzi 40000 i liczymy odpowiedź około 224760 wychodzi

Zadanie 2

Rata dla transzy kredytu w wysokości 50000+kD wynosi:

$$R_k = \frac{50000 + kD}{a_{\overline{5}}}, \quad k \in \{0,1,...,9\}$$

Aby policzyć kapitał, wpłatę i odsetki w racie na koniec 8 roku bierzemy pod uwagę transze dla k=3,4,5,6,7 (wcześniejsze są spłacone) k oznacza początek roku k+1 (numer transzy)

$$DLUG(7) = \sum_{k=3}^{7} R_k \cdot a_{\overline{k-2}}$$

$$DLUG(8) = \sum_{k=3}^{7} R_k a_{\overline{k-3}}$$

$$WPLATA(8) = \sum_{k=3}^{7} R_k$$

$$KAP(8) = DLUG(7) - DLUG(8)$$

$$\frac{OD(8)}{KAP(8)} = \frac{WPLATA(8) - KAP(8)}{KAP(8)} = \frac{WPLATA(8)}{KAP(8)} - 1 = 0{,}26523 \rightarrow \frac{WPLATA(8)}{KAP(8)} = 1{,}26523$$

$$KAP(8) = \sum_{k=3}^{7} R_k \left(a_{\overline{k-2}} - a_{\overline{k-3}}\right) = \sum_{k=3}^{7} \frac{50000 + kD}{a_{\overline{5}}} v^{k-2} = \frac{0{,}08 \sum_{k=3}^{7} (50000 + kD) v^{k-2}}{1 - v^5} =$$

$$= \frac{0{,}08\left(50000 a_{\overline{5}} + D\left(3v + 4v^2 + 5v^3 + 6v^4 + 7v^5\right)\right)}{1 - v^5} = \frac{50000 - 50000v^5 + 0{,}08D\left(3v + 4v^2 + ... + 7v^5\right)}{1 - v^5}$$

$$WPL(8) = \sum_{k=3}^{7} \frac{50000 + kD}{a_{\overline{5}}} = \frac{0{,}08(250000 + 25D)}{1 - v^5} = \frac{20000 + 2D}{1 - v^5}$$

$$\frac{20000 + 2D}{50000 - 50000v^5 + 0{,}08D\left(3v + 4v^2 + 5v^3 + 6v^4 + 7v^5\right)} = 1{,}26523$$

$$20000 + 2D = 63261{,}5 - 63261{,}5v^5 + 1{,}26523 \cdot 0{,}08D\left(3v + 4v^2 + 5v^3 + 6v^4 + 7v^5\right)$$

$$D = \frac{63261{,}5v^5 - 43261{,}5}{0{,}08 \cdot 1{,}26523 \cdot \left(3v + 4v^2 + 5v^3 + 6v^4 + 7v^5\right) - 2} \approx 5000$$

Zadanie 3

Korzystamy ze wzoru:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2arctgx = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ...\right] \rightarrow 2\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ...\right] = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2x$$

$$ODP = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{2n+1} 0{,}49^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{v^n}{2n+1} \quad \text{gdzie } v = 0{,}98$$

$$ODP = g(v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2v^n}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(\sqrt{v}\right)^{2n}}{2n+1} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{v}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(\sqrt{v}\right)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{v}} \cdot 2\left[\frac{\left(\sqrt{v}\right)^3}{3} + \frac{\left(\sqrt{v}\right)^5}{5} + \dots\right] = \frac{1}{\sqrt{v}}\left[\ln\left(\frac{1+\sqrt{v}}{1-\sqrt{v}}\right) - 2\sqrt{v}\right]$$
$$ODP = \frac{1}{\sqrt{0{,}98}}\left[\ln\left(\frac{1+\sqrt{0{,}98}}{1-\sqrt{0{,}98}}\right) - 2\sqrt{0{,}98}\right] \approx 3{,}3419$$

Zadanie 4

Tu chyba jest błąd:

$$DLUG(n) = (P+nQ)v + \left(P+(n+1)Q\right)v^2 + \dots + \left(P+(2n-1)Q\right)v^n +$$
$$+ Sv^{n+1} + (S-T)v^{n+2} + (S-2T)v^{n+3} + \dots + (S-(n-1)T)v^{2n}$$
$$DLUG(n+1) = (P+(n+1)Q)v + (P+(n+2)Q)v^2 + \dots + (P+(2n-1)Q)v^{n-1} +$$
$$+ Sv^n + (S-T)v^{n+1} + (S-2T)v^{n+2} + \dots + (S-(n-1)T)v^{2n-1}$$
$$DLUG(2n+1) = (S-T)v + (S-2T)v^2 + \dots + (S-(n-1)T)v^{n-1}$$
$$DLUG(2n+2) = (S-2T)v + (S-3T)v^2 + \dots + (S-(n-1)T)v^{n-2}$$

$$KAP(n+1) = DLUG(n) - DLUG(n+1) =$$
$$= -Qv - Qv^2 - \dots - Qv^{n-1} + \left[P+(2n-1)Q-S\right]v^n +$$
$$+ Tv^{n+1} + Tv^{n+2} + \dots + Tv^{2n-1} + \left[S-(n-1)T\right]v^{2n}$$

$$KAP(2n+2) = DLUG(2n+1) - DLUG(2n+2) =$$
$$= Tv + Tv^2 + \dots + Tv^{n-2} + \left[S-(n-1)T\right]v^{n-1}$$

$$OD(n+1) = P + nQ + Qv + Qv^2 + \dots + Qv^{n-1} - \left[P+(2n-1)Q-S\right]v^n$$
$$- Tv^{n+1} - Tv^{n+2} - \dots - Tv^{2n-1} - \left[S-(n-1)T\right]v^{2n}$$

$$OD(2n+2) = S - T - KAP(2n+2)$$

$$ODP = OD(n+1) - OD(2n+2) =$$
$$= Q\left[n + v + v^2 + \dots + v^{n-1} + v^n - 2nv^n\right] + P\left[1 - v^n\right] +$$
$$+ S\left[v^n - v^{2n} - 1 + v^{n-1}\right] + T\left[-v^n a_{\overline{n}} + nv^{2n} + 1 + a_{\overline{n-1}} - nv^{n-1}\right] =$$
$$= \left(Q - v^n T\right)a_{\overline{n}} + Ta_{\overline{n-1}} - (S-nT)v^{2n} + \left(S - P - 2nQ\right)v^n + (S-nT)v^{n-1} + (P+nQ-S+T)$$

Znaki przy T wychodzą odwrotnie:
Chyba odpowiedź C wyjdzie gdy raty są przez cały okres rosnące

Zadanie 5

r=0,04

$$\ln\left(\frac{S(5)}{S(3)}\right) = \left(r - \delta - 0{,}5\sigma^2\right)\cdot 5 + \sigma W(5) - \left(r - \delta - 0{,}5\sigma^2\right)\cdot 3 - \sigma W(3) = 2r - 2\delta - \sigma^2 + \sigma W(5) - \sigma W(3)$$

$$\ln\left(\frac{S(2)}{S(1)}\right) = \left(\alpha - \delta - 0{,}5\sigma^2\right)\cdot 2 + \sigma W(2) - \left(\alpha - \delta - 0{,}5\sigma^2\right) - \sigma W(1) = \alpha - \delta - 0{,}5\sigma^2 + \sigma W(2) - \sigma W(1)$$

Z vi. $E\left(2r - 2\delta - \sigma^2 + \sigma W(5) - \sigma W(3)\right) = 2r - 2\delta - \sigma^2 = 0{,}06$
Z vii. $E\left(\alpha - \delta - 0{,}5\sigma^2 + \sigma W(2) - \sigma W(1)\right) = \alpha - \delta - 0{,}5\sigma^2 = 0{,}1 \;|\cdot 2$

Z tego mamy układ:

$$\begin{cases} 2r - 2\delta - \sigma^2 = 0{,}06 \\ 2\alpha - 2\delta - \sigma^2 = 0{,}2 \end{cases} \rightarrow \alpha = 0{,}11$$

Z viii. P=10

Z ix. $\Delta = -\frac{20}{S}$ (dla opcji sprzedaży Δ jest ujemna)
Korzystamy ze wzoru na oczekiwaną stopę zwrotu opcji:

$$\mu_P(S,t) = r + (\mu_S - r)[N(d_1) - 1]\frac{S}{P}$$

$$\mu_S = \alpha = 0{,}11$$
$$r = 0{,}04$$
$$N(d_1) - 1 = \Delta = -\frac{20}{S}$$
$$P = 10$$

$$ODP = 0{,}04 + (0{,}11 - 0{,}04)\cdot\left(-\frac{20}{10}\right) = -0{,}1 = -10\%$$

Zadanie 6

Tu wychodzi A ale w przybliżeniu:

$$S(0) = 32$$
$$X = 32$$
$$\sigma = 0{,}3$$
$$\Delta = 0{,}5567$$
$$r = 0{,}04$$
$$d_2 = 0{,}0175$$
$$T = 0{,}25$$

$ODP = S(0) \cdot N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2)$

Wiemy, że $\Delta = N(d_1) = 0{,}5567$

$$ODP = 32 \cdot 0{,}5567 - 32e^{-0{,}04 \cdot 25} N(0{,}0175) = 32 \cdot 0{,}5567 - 32e^{-0{,}01} \int_{-\infty}^{0{,}0175} \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx 17{,}81 - 12{,}64 \int_{-\infty}^{0{,}0175} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Zadanie 7

$$16000 \cdot 0{,}7 + 0{,}45 \cdot 200000 = 101200$$
$$150000 = p_1 \cdot 101200v + p_2 \left[16000v + 101200v^2\right] + p_3 \left[16000\left(v + v^2\right) + 101200v^3\right] +$$
$$+ p_4 \left[16000 a_{\overline{3}} + 101200v^4\right] + q\left[16000 a_{\overline{4}} + 200000v^4\right]$$

$$p_1 = 0{,}1$$
$$p_2 = 0{,}9 \cdot 0{,}15 = 0{,}135$$
$$p_3 = 0{,}25 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}85 = 0{,}19125$$
$$p_4 = 0{,}9 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}75 j = 0{,}57375 j$$
$$q = 0{,}57375(1 - j) = 1 - \sum_{i=1}^{4} p_i$$

Wstawiamy i wyliczamy j – wychodzi około 35,09%

Zadanie 8

a – ilość obligacji P(0,1)
b – ilość obligacji P(0,2)
c – ilość obligacji P(0,3)
d – ilość obligacji P(0,4)

a,b,c,d – całkowite, mogą być ujemne

a)0,9a+0,828b+0,792c+0,756d=0 bo wydajemy 0
żeby nie było arbitrażu to w każdym wariancie zarobimy 0 tzn

$$\begin{cases} a + 0{,}95b + 0{,}9c + 0{,}88d = 0 \\ a + 0{,}9b + 0{,}87c + dx = 0 \\ a + 0{,}87b + 0{,}84c + 0{,}78d = 0 \end{cases}$$

a)mnożymy przez $\frac{10}{9} \rightarrow b)\ a + 0{,}92b + 0{,}88c + 0{,}84d = 0$
b)uwzględniamy rozpisując układ równań:

$$\begin{cases} 0{,}03b + 0{,}02c + 0{,}04d = 0 \\ -0{,}02b - 0{,}01c + (x-0{,}84)d = 0 \\ -0{,}05b - 0{,}04c - 0{,}06d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (*)3b + 2c + 4d = 0 \\ (**)2b + c - 100d(x-0{,}84) = 0 \\ (***)5b + 4c + 6d = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{2b+c}{100d} + 0{,}84$$

Z (*) $c = \dfrac{-3b-4d}{2}$ i wstawiamy do (***)

$5b - 2(3b+4d) + 6d = 0 \rightarrow b = -2d$

Wstawiamy do (*) $3\cdot(-2d) + 2c + 4d = 0 \rightarrow c = d$

Czyli $x = \dfrac{2\cdot(-2d)+d}{100d} + 0{,}84 = 0{,}81$

Zadanie 9

$$dur(a_{\overline{10}}) = \frac{(Ia)_{\overline{10}}}{a_{\overline{10}}}$$

$$(Da)_{\overline{10}} + (Ia)_{\overline{10}} = 11a_{\overline{10}}$$

$$dur((Da)_{\overline{10}} + (Ia)_{\overline{10}}) = dur(11a_{\overline{10}}) = dur(a_{\overline{10}})$$

Z drugiej strony:

$$dur((Da)_{\overline{10}} + (Ia)_{\overline{10}}) = dur(Da)_{\overline{10}} \frac{(Da)_{\overline{10}}}{(Da)_{\overline{10}} + (Ia)_{\overline{10}}} + dur(Ia)_{\overline{10}} \frac{(Ia)_{\overline{10}}}{(Da)_{\overline{10}} + (Ia)_{\overline{10}}}$$

Czyli:

$$dur(a_{\overline{10}}) = \frac{3{,}72(Da)_{\overline{10}} + 6{,}7(Ia)_{\overline{10}}}{11a_{\overline{10}}} =$$

$$= \frac{3{,}72(11a_{\overline{10}} - (Ia)_{\overline{10}}) + 6{,}7(Ia)_{\overline{10}}}{11a_{\overline{10}}} = \frac{40{,}92a_{\overline{10}} + 2{,}98(Ia)_{\overline{10}}}{11a_{\overline{10}}} =$$

$$= \frac{40{,}92 + 2{,}98\dfrac{(Ia)_{\overline{10}}}{a_{\overline{10}}}}{11} = \frac{40{,}92 + 2{,}98dur(a_{\overline{10}})}{11} \rightarrow$$

$$\rightarrow 11dur(a_{\overline{10}}) = 40{,}92 + 2{,}98dur(a_{\overline{10}}) \rightarrow 8{,}02dur(a_{\overline{10}}) = 40{,}92$$

$$ODP = \frac{40{,}92}{8{,}02} \approx 5{,}1$$

Zadanie 10

$$\alpha_1 = v + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 + \ldots$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 + \ldots$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{3}v^3 + \ldots..$$

$$\alpha_N = \frac{1}{N}v^N + \frac{1}{N+1}v^{N+1} + \ldots$$

$$ODP = v + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)v^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)v^3 + \ldots = v + v^2 + \ldots = \frac{v}{1-v} = \frac{\frac{10}{11}}{1-\frac{10}{11}} = 10$$